

Diagonalisation de matrices symétriques

Définitions

Une matrice $Q \in M_{n \times n}$ est **orthogonale** si $Q^T Q = I_n$.

Une matrice $A \in M_{n \times n}$ est **symétrique** si $A^T = A$.

Théorème spectral

Une matrice $A \in M_{n \times n}$ est symétrique si et seulement si elle est **diagonalisable en base orthonormale**, c'est à dire qu'on peut écrire

$$A = PDP^T, \quad \text{avec } D \in M_{n \times n} \text{ diagonale, } P \in M_{n \times n} \text{ orthogonale.}$$

De plus, les valeurs propres de A sont **réelles**. Pour chaque valeurs propre, la dimension algébrique et la dimension géométrique sont égales.

Décomposition en valeurs singulières

Définition

Les valeurs singulières de $A \in M_{m \times n}$ sont définies par $\sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda_i} = \|A\vec{v}_i\|$ où λ_i sont les valeurs propres (toujours positives) de $A^T A$ et $\vec{v}_i$ est un vecteur propre unitaire de $A^T A$ associé à λ_i .

Théorème

Une matrice $A \in M_{m \times n}$ de rang k peut toujours s'écrire $A = U\Sigma V^T$ avec

- $\Sigma \in M_{m \times n}$ diagonale par blocs ;
- $V \in M_{n \times n}$ **orthogonale** ;
- $U \in M_{m \times m}$ **orthogonale**.

Décomposition en valeurs singulières

$\Sigma \in M_{m \times n}$ est la matrice des valeurs singulières de A :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m \times n}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0,$$

où σ_i sont les valeurs singulières **non-nulles** de A .

$V = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \in M_{n \times n}$ est la matrice **orthogonale** des vecteurs propres de $A^T A$, classées selon **l'ordre décroissant de ses valeurs propres**.

$U = \begin{pmatrix} A\vec{v}_1 & \dots & A\vec{v}_k & \vec{u}_{k+1} & \dots & \vec{u}_m \end{pmatrix} \in M_{m \times m}$ est la matrice **orthogonale** de l'image des vecteurs propres de $A^T A$, complétée, si nécessaire (quand $k < m$), en une base de $\mathbb{R}^m$ par des vecteurs unitaires.